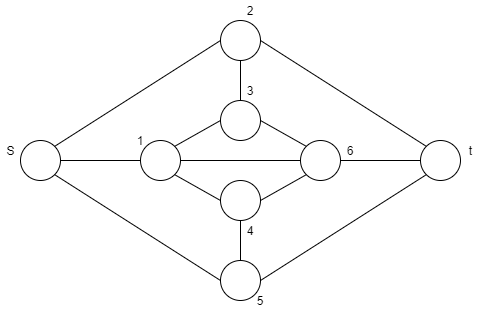
**Модифицированный алгоритм определения максимального потока в сети**

Задан неориентированный граф следующего вида:



Путь из вершины в вершину .

Представленный в виде графа сети соответствует матрица пропускных способностей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ***s*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***t*** |
|  |  | ***s*** | 0 | 1 | 4 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 |
|  |  | ***1*** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 |
|  |  | ***2*** | 4 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|  | ***=*** | ***3*** | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 |
|  |  | ***4*** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 |
|  |  | ***5*** | 4 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 |
|  |  | ***6*** | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | 6 |
|  |  | ***t*** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 6 | 0 |

В соответствии со схемой сети определим три пути: “верхний”, “средний” и “нижний” .

По каждому ребру перемещается поток равны 1.

Тогда , если цепь и , если цепь .

Итоговая матрица начального пути имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ***s*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***t*** |
|  |  | ***s*** |  | 1 | 1 |  |  | 1 |  |  |
|  |  | ***1*** | -1 |  |  |  |  |  | 1 |  |
|  |  | ***2*** | -1 |  |  |  |  |  |  | 1 |
|  | ***=*** | ***3*** |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | ***4*** |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | ***5*** | -1 |  |  |  |  |  |  | 1 |
|  |  | ***6*** |  | -1 |  |  |  |  |  | 1 |
|  |  | ***t*** |  |  | -1 |  |  | -1 | -1 |  |

Определение путей, которые не насыщены потоком . Для этого из соответствующих элементов матрицы вычитаются элементы матрицы.

Итоговая матрица имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ***s*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***t*** |
|  |  | ***s*** |  | 0 | 3 |  |  | 3 |  |  |
|  |  | ***1*** | 2 |  |  | 1 | 1 |  | 1 |  |
|  |  | ***2*** | 5 |  |  | 2 |  |  |  | 0 |
|  | ***=*** | ***3*** |  | 1 | 2 |  |  |  | 3 |  |
|  |  | ***4*** |  | 1 |  |  |  | 3 | 1 |  |
|  |  | ***5*** | 5 |  |  |  | 3 |  |  | 0 |
|  |  | ***6*** |  | 3 |  | 3 | 1 |  |  | 5 |
|  |  | ***t*** |  |  | 2 |  |  | 2 | 7 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Ненулевые элементы матрицы соответствуют ненасыщенным ребрам сети , то есть элементы , лежащие выше главной диагонали.

Цепочка ненасыщенных рёбер имеет вид:

Образующие путь элементы , соответствующие элементы (при ) обведены кружками, соответствующие им элементы (противоположного направления) выделены квадратами.

Среди всех определяется *min* значение.

(Если ненасыщенный путь – не единственный, то выбирается тот, у которого *min* является наибольшим).

По выделенному пути можно добавить дополнительный поток мощности 2.

Матрица формируется путем вычитания значения 2 из чисел, обведенных кружком, и добавлением 2 к числам, обведенным квадратом.

Получим:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ***s*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***t*** |
|  |  | ***s*** |  | 0 | 1 |  |  | 3 |  |  |
|  |  | ***1*** | 2 |  |  | 1 | 1 |  | 1 |  |
|  |  | ***2*** | 7 |  |  | 0 |  |  |  | 0 |
|  | ***=*** | ***3*** |  | 1 | 4 |  |  |  | 1 |  |
|  |  | ***4*** |  | 1 |  |  |  | 3 | 1 |  |
|  |  | ***5*** | 5 |  |  |  | 3 |  |  | 0 |
|  |  | ***6*** |  | 3 |  | 5 | 1 |  |  | 3 |
|  |  | ***t*** |  |  | 2 |  |  | 2 | 9 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Цепочка ненасыщенных рёбер имеет вид:

Величина дополнительного потока:

Вычитаем 1 из в кружке и добавляем 1 к в квадрате.

Результирующая матрица имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ***s*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***t*** |
|  |  | ***s*** |  | 0 | 1 |  |  | 2 |  |  |
|  |  | ***1*** | 2 |  |  | 1 | 1 |  | 1 |  |
|  |  | ***2*** | 7 |  |  | 0 |  |  |  | 0 |
|  | ***=*** | ***3*** |  | 1 | 4 |  |  |  | 1 |  |
|  |  | ***4*** |  | 1 |  |  |  | 4 | 0 |  |
|  |  | ***5*** | 6 |  |  |  | 2 |  |  | 0 |
|  |  | ***6*** |  | 3 |  | 5 | 2 |  |  | 2 |
|  |  | ***t*** |  |  | 2 |  |  | 2 | 10 |  |

Цепочка ненасыщенных рёбер:

Дополнительный поток:

Итоговая матрица примет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ***s*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***t*** |
|  |  | ***s*** |  | 0 | 1 |  |  | 1 |  |  |
|  |  | ***1*** | 2 |  |  | 1 | 2 |  | 0 |  |
|  |  | ***2*** | 7 |  |  | 0 |  |  |  | 0 |
|  | ***=*** | ***3*** |  | 1 | 4 |  |  |  | 1 |  |
|  |  | ***4*** |  | 0 |  |  |  | 5 | 0 |  |
|  |  | ***5*** | 7 |  |  |  | 1 |  |  | 0 |
|  |  | ***6*** |  | 4 |  | 5 | 2 |  |  | 1 |
|  |  | ***t*** |  |  | 2 |  |  | 2 | 11 |  |

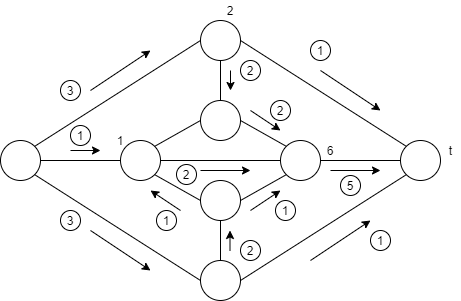
По полученной матрице видим, что из узла может быть доступ к узлам 2, 4, 5, узел недоступен из узла . Поэтому вычисления закончены.

Определение конечного вида матрицы максимального потока реализуется следующим образом: .

В результате получим:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | ***s*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***t*** |
|  |  | ***s*** |  | 1 | 3 |  |  | 3 |  |  |
|  |  | ***1*** | -1 |  |  |  | -1 |  | 2 |  |
|  |  | ***2*** | -3 |  |  | 2 |  |  |  | 1 |
|  | ***=*** | ***3*** |  |  | -2 |  |  |  | 2 |  |
|  |  | ***4*** |  | 1 |  |  |  | -2 | 1 |  |
|  |  | ***5*** | -3 |  |  |  | 2 |  |  | 1 |
|  |  | ***6*** |  | -2 |  | -2 | -1 |  |  | 5 |
|  |  | ***t*** |  |  | -1 |  |  | -1 | -5 |  |

Итоговый вид схемы потоков данных в сети:



**Решение задачи о максимальном потоке с использованием расстановки меток**

Обозначения:

* – ориентированная сеть с одним источником и одним стоком .
* – пропускная способность дуги .
* – поток, протекающий по дуге .

Понятия, используемые для определения максимального потока в сети:

* метка;
* аугментальный путь потока.

Метка используется как для указания величины потока, так и для источника потока, вызывающего изменения текущей величины потока по дуге, соединяющей этот источник с рассматриваемым узлом.

Если единиц потока посылается из узла в узел и вызывает увеличение потока по этой дуге, то узел помечается и узла символом , а узлу приписывается метка .

Если посылка единиц потока вызывает уменьшение потока по дуге, то узел помечается символом , а самому узлу приписывается метка .

Поток из в увеличивается, когда единиц потока посылаются дополнительно в узел по дуге в направлении, совпадающим с её ориентацией (дуга называется прямой).

Поток из в уменьшается, если единиц потока посылается в узел по дуге в направлении, противоположном её ориентации. Дуга называется обратной.

Пример меток узлов:



**Процедура расстановки меток в задаче о максимальном потоке**

Если – ориентированная дуга, то ей приписан поток . Тогда значение не может быть больше значения . Тогда поток по прямой дуге может быть увеличен на величину .

Для дуги возможно уменьшение потока на величину в том случае, если (где – текущий поток по дуге ).

Уменьшение потока на величину связано с потоком в узле (то есть несколько единиц потока может быть взято из узла ).

Таким образом, поток по обратной дуге может быть уменьшен на величину .

Алгоритм предполагает выполнение следующих шагов:

1. Предварительный этап
2. Выбор произвольного потока (значение потока из в может быть задано произвольно). Выбираем начальный потока для любой дуги .
3. С исходной вершины (истока) сопоставляем метку ; вершина помечена, но не просмотрена, остальные вершины не помечены.
4. Этап расстановки меток

Выбирается произвольная вершина (помеченная, но не просмотренная вершина ).

Те вершины , для которых получают метку , где , такие узлы помечены, но не просмотрены.

Те вершины , для которых получают метку , где , узлы помечены, но не просмотрены.

После реализации этих шагов вершина – помеченная и просмотренная (так как все вершины, смежные с ней, удалось пометить).

Действия пунктов а)-c) выполняются до тех пор, пока вершины не будет помечена.

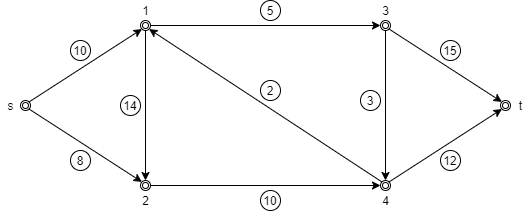
Если нельзя будет пометить ни одну вершину и сток оказывается не помеченным, то алгоритм может быть закончен. Если сток помечен, то переход к следующему этапу.

Этап изменения потока

Для определённого пути идентифицируем последовательность вершин, в него входящих.

Если начальная вершина дуги помечена “+”, то увеличивается поток на величину . Если начальная вершина идентифицируется “-”, то поток по этой дуге уменьшается на величину .

**Пример реализации алгоритма:**



Рассматривается только один путь через текущую вершину.

Подготовительный этап

Этап расстановки меток

1. Вершина , так как помечена, но не просмотрена.

Вершина , помечена, но не просмотрена, вершины 1 и 2 помечены, но не просмотрены.

1. Вершина 1
2. Вершина 2

Вершины 1 и 2 помечены и просмотрены.

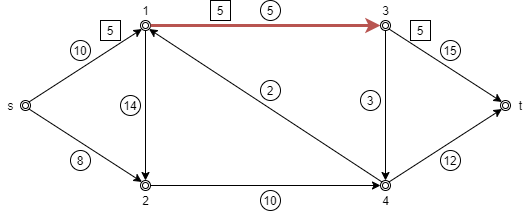
1. Вершина 3

Так как помечена вершина , я переходим на следующий этап.

Этап изменения потока

Путь, по которому переместились из вершины в вершину :

Величина потока .



− насыщенная дуга.

Этап расстановки меток

1. Вершина
2. Вершина 1

Вершину 3 из вершины 1 пометить нельзя (дуга насыщенна). Вершина 1 помечена и просмотрена.

1. Вершина 2

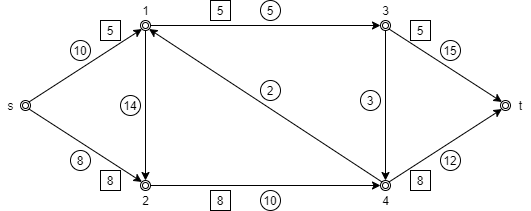
Вершины 1 и 2 помечены и просмотрены.

1. Вершина 4

Этап изменения потока

Путь, по которому переместились из вершины в вершину :

Величина потока .



Все остальные потоки равны 0.

Этап расстановки меток

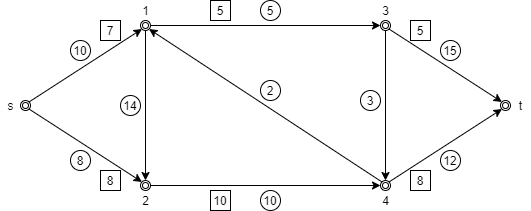
1. Вершину 2 из вершины s пометить нельзя.
2. Вершина 1

Вершины 3 и 4 из вершины 1 пометить нельзя.

1. Вершина 2
2. Вершина 4

Этап изменения потока

Величина потока .



Этап расстановки меток

1. Вершину 2 из вершины s пометить нельзя.
2. Вершина 1

Вершины 3 и 4 из вершины 1 пометить нельзя.

Вершина 1 помечена и просмотрена.

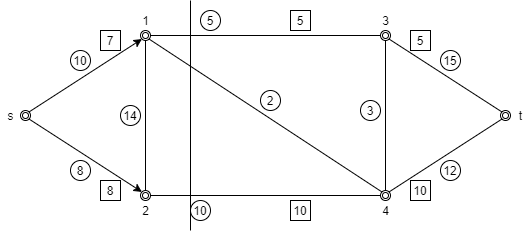
Вершина 2 помечена и не просмотрена.

1. Вершина 2

Из вершины 2 другие вершины пометить не удается.

Так как ни одной вершины пометить не удалось, тогда максимальный поток .

Максимальный разрез имеет следующий вид:



**Задача о многополюсном максимальном потоке**

В задаче предполагается, что существует несколько источников данных, передаваемых по сети (то есть каждый узел является источником данных, которые передаются по сети). Величина потока, который транспортируется к нескольким строкам, ограничена только пропускной способностью канала (стр. 179).

**Задача динамического управления потоками информации в сети**